Exercice1

1) $f(x)=x^5-5x^2+2-\frac{3}{x^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc f admet une primitive F sur $\mathbb{R}^*$ et $F(x)=\frac{x^6}{6}-5\frac{x^3}{3}+2x+\frac{3}{x}+k, k\in\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{x^4-1}{x^2}=x^2-\frac{1}{x^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}^* \Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}^*$ et $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+k, k\in\mathbb{R}$

3) $f(x)=(2x-1)(x^2-x-4)^8$

f est continue sur (fonction polynôme)

Donc f admet une primitive F sur

On a : $f(x)=(x^2-x-4)'(x^2-x-4)^8$

Donc $F(x)=\frac{(x^2-x-4)^9}{9}+k, k\in\mathbb{R}$

4) $f(x)=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)$

f Continue sur $[0,\infty[\Rightarrow f$ admet une primitive sur $[0,\infty[$ et $f(x)=x+\sqrt{x}-2\sqrt{x}-2$

$=x-\sqrt{x}-2$

$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+k \ ; k\in IR$

5) $f(x)=(x^2-1)(x^3-3x+5)$

Posons $U(x)=x^3-3x+5$

On a $U'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

$\Rightarrow x^2-1=\frac{1}{3}U'(x)$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}U'(x)U(x)$

f Continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et $F(x)=\frac{1}{3}\frac{U^2(x)}{2}+k, k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{6}(x^3-3x+5)^2+k, k\in\mathbb{R}$

6) $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=\frac{1}{4}\frac{(8x+4)}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$

$=\frac{1}{4}\frac{(4x^2+4x+5)'}{\sqrt{4x^2+4x+5}} \quad =\frac{1}{2}\frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$

Avec $U(x)=\sqrt{4x^2+4x+5}$

Or $4x^2+4x+5>0$ car $\Delta=16-80<0$

(Ou bien: $4x^2+4x+5=(2x+1)^2+4>0$)

Donc $F(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{4x^2+4x+5})+k; k\in IR_+$

7) $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}$

f Fonction rationnelle $\Rightarrow f$ continue sur $Df=\mathbb{R}$

Car : $x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0$

(Ou bien on a : $\Delta=4-20<0$)

$\Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et on a

$f(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2+2x+5)'}{(x^2+2x+5)^2} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{U'(x)}{(U(x))^2}\right)$

Avec $U(x)=x^2+2x+5$

$\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{2(x^2+2x+5)}+k, k\in\mathbb{R}$

8) $f(x)=(2x+1)^3$: f polynôme

$\Rightarrow f$ Continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ .Posons $U(x)=2x+1$

On a $U'(x)=2$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}U'(x)U(x)^3$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\frac{U(x)^4}{4}+k, k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{U(x)^4}{8}+k, k\in\mathbb{R}$

$=\frac{(2x+1)^4}{8}+k$

9) $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$, continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}$.

$F(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+k, k\in\mathbb{R}$

10) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cos(\sqrt{x^2-1})$

On a : $x^2-1>0$ pour $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[=I$

Posons $U(x)=\sqrt{x^2-1} \Rightarrow U'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$x\mapsto U(x)$ est continue sur I et $U(I)=]0,+\infty[$